Вариант I

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $5^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11.

Решение. Заметим, что $5^{2n}+3^{n+2}+3^n=(22+3)^n+10\cdot 3^n$. Воспользуемся биномом Ньютона и сгруппируем все слагаемые, в которых есть 22: $(22+3)^{2n}+10\cdot 3^n=22A+3^n+10\cdot 3^n=22A+11\cdot 3^n$. Поскольку каждое слагаемое делится на 11, то и все число делится на 11.

Комментарий. То же самое решение можно изложить на языке сравнений:

$$5^{2n}+3^{n+2}+3^n=25^n+10\cdot 3^n\equiv 3^n+10\cdot 3^n=11\cdot 3^n\equiv 0 \pmod{11}.$$

Другое решение. Докажем утверждение задачи для целых неотрицательных n индукцией по n.

База. Если $n=0$, то $5^{2n}+3^{n+2}+3^n=5^0+3^2+3^0=11$ — делится на 11.

Переход. Предположим, что при $n=k$ число $5^{2n}+3^{n+2}+3^n=5^{2k}+10\cdot 3^k$ делится на 11, и докажем, что при $n=k+1$ число $5^{2n}+3^{n+2}+3^n=5^{2k+2}+10\cdot 3^{k+1}$ также делится на 11.

Заметим, что

$$5^{2k+2}+10\cdot 3^{k+1}=3\cdot(5^{2k}+10\cdot 3^k)+22\cdot 5^{2k}.$$

Первое слагаемое в правой части делится на 11 по предположению индукции, а второе — потому что содержит множитель 22. Значит, и вся сумма делится на 11. Переход доказан.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 13 авантюристов есть рубины; ровно у 9 — изумруды; ровно у 15 — сапфиры; ровно у 6 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть сапфиры, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Ответ: 22.

Решение. Заметим, что количество авантюристов, у которых есть сапфиры, равняется суммарному количеству авантюристов, у которых есть изумруды или бриллианты. Тогда из первого условия следует, что у 9 авантюристов есть сапфиры и изумруды, а у 6 — сапфиры и бриллианты. Т.е. у каждого авантюриста, у которого есть изумруды, обязательно есть сапфиры. Тогда, из второго условия, не может быть авантюриста, у которого есть и изумруды, и рубины. Значит, авантюристов как минимум $13+9=22$.

Столько авантюристов и правда может быть: пусть у нас есть 9 авантюристов, у которых есть сапфиры и изумруды, 6 авантюристов, у которых есть сапфиры, бриллианты и рубины, а также 7 авантюристов, у которых есть только рубины. Можно убедиться, что этот пример подходит под все условия.

Задача 3. Бригада рабочих трудилась на заливке катка на большом и малом полях, причем площадь большого поля в 2 раза больше площади малого поля. В той части бригады, которая работала на большом поле, было на 4 рабочих больше, чем в той части, которая работала на малом поле. Когда заливка большого катка закончилась, часть бригады, которая была на малом поле, еще работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в бригаде?

Ответ: 10.

Решение. Обозначим число рабочих на меньшем поле как n, тогда их количество на большем поле равно $n+4$, а всего в бригаде $2n+4$ человека. В условии задачи «молчаливо предполагается», что производительность каждого рабочего одинаковая, обозначим ее a. Соответственно, производительности каждой части бригад равны an и $a(n+4)$. Если площадь малого поля S, то площадь большого равна $2S$. Время, затраченное на выполнение всей работы каждой из бригад, соответственно равно $\frac{S}{an}$ и $\frac{2S}{a(n+4)}$. По условию задачи $\frac{S}{an}>\frac{2S}{a(n+4)}$. В силу положительности всех переменных, это неравенство равносильно неравенству $n+4>2n$, или $n<4$. Поэтому $n\leqslant 3$, а $2n+4\leqslant 10$. Ситуация равенства, очевидно, возможна: достаточно взять любые положительные S и a.

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $BC=8$ и $AC=4$. Найдите длину стороны AB, если длина вектора $4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}$ равна 10.

Ответ: 5.

Ответ: Обозначим радиус описанной окружности через R. Тогда для любых чисел x, y, z справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
&\left(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}\right)^2=\\
&=x^2OA^2+y^2OB^2+z^2OC^2+2xy\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)+2yz\left(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)+2xz\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right)=\\
&=(x^2+y^2+z^2)R^2+xy(OA^2+OB^2-AB^2)+yz(OB^2+OC^2-BC^2)+xz(OA^2+OC^2-AC^2)=\\
&=(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)R^2-xyAB^2-yzBC^2-xzAC^2=\\
&=(x+y+z)^2R^2-xyAB^2-yzBC^2-xzAC^2.
\end{aligned}$$

Тогда при $x=4$, $y=-1$, $z=-3$ получаем равенство $10^2=0\cdot R^2+4AB^2-3BC^2+12AC^2$, откуда $AB^2=\frac{1}{4}\left(100-12AC^2+3BC^2\right)=25$, т.е. $AB=5$.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a+c=4\\ ac+b+d=6\\ ad+bc=5\\ bd=2\end{cases}.$$

Ответ: $(3,2,1,1)$ и $(1,1,3,2)$.

Решение. Пусть x^2+ax+b и x^2+cx+d — два квадратичных многочлена, коэффициенты которых — искомые корни данной системы. Тогда

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd=x^4+4x^3+6x^2+5x+2.$$

Методом подбора находим, что числа -1 и -2 — корни этого многочлена, откуда

$$x^4+4x^3+6x^2+5x+2=(x^2+3x+2)(x^2+x+1).$$

Так как x^2+x+1 не имеет действительных корней, то он не представим в виде произведения двух многочленов первой степени, поэтому тождество

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=(x^2+3x+2)(x^2+x+1)$$

возможно только в двух случаях:

$$\begin{cases} x^2+ax+b=x^2+3x+2\\ x^2+cx+d=x^2+x+1\end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+ax+b=x^2+x+1\\ x^2+cx+d=x^2+3x+2\end{cases}$$

тогда в первом случае получаем $a=3$, $b=2$, $c=1$, $d=1$, а во втором — $a=1$, $b=1$, $c=3$, $d=2$.

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}}+\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}}=\arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Ответ: 0, $\pm\frac{21}{10}$

Решение. Из условия на область определения арксинуса вытекает, что

$$|x|\leqslant\frac{8\sqrt{21}}{5\sqrt{11}}, \text{ или, равносильно, } x^2\leqslant\frac{1344}{275}. \qquad (*)$$

Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что

$$\cos\arcsin t > 0$$

и, следовательно,

$$\sin(\arcsin t) = t, \text{ и } \cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2},$$

получаем

$$\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1-\frac{11x^2}{16\cdot 21}} + \frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1-\frac{11x^2}{4\cdot 21}} = \frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}.$$

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем

$$\frac{x\sqrt{11}}{8\cdot 21}\left(\sqrt{336-11x^2}+\sqrt{84-11x^2}-5\sqrt{21}\right)=0$$

Из данного уравнения следует, что или $x=0$ (который, очевидно, подходит), или x является корнем уравнения

$$\sqrt{336-11x^2}+\sqrt{84-11x^2}=5\sqrt{21}.$$

Из условия (*) следует, что все подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то их можно возвести в квадрат

$$336-11x^2+2\sqrt{(336-11x^2)(84-11x^2)}+84-11x^2=525.$$

Перенося всё кроме корня в правую часть уравнения, имеем

$$2\sqrt{(336-11x^2)(84-11x^2)}=22x^2+105.$$

Возводя ещё раз обе части уравнения в квадрат, получаем

$$4(336-11x^2)(84-11x^2)=484x^4+4620x^2+11025,$$

или

$$23100x^2=101871.$$

Таким образом, уравнение имеет ещё два возможных корня

$$x=\pm\frac{21}{10}.$$

Проверка. Проверяем, что левая часть уравнения при данных значениях аргумента лежит в промежутке $[-\pi/2;\pi/2]$. Для этого вычисляем косинус левой части

$$\cos\left(\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}}+\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}}\right)=\sqrt{\left(1-\frac{11x^2}{4\cdot 21}\right)\left(1-\frac{11x^2}{16\cdot 21}\right)}-\frac{11x^2}{8\cdot 21}=$$
$$=\sqrt{\left(1-\frac{11\cdot 21}{4\cdot 100}\right)\left(1-\frac{11\cdot 21}{16\cdot 100}\right)}-\frac{11\cdot 21}{8\cdot 100}=\frac{13\cdot 37}{800}-\frac{11\cdot 21}{800}>0.$$

Поскольку значения косинуса положительно, а левая часть лежит в промежутке $[-\pi;\pi]$, то она лежит в промежтке $[-\pi/2;\pi/2]$. Значит, все найденные числа являются решением задания.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2^2 x+(a-6)\log_2 x+9-3a=0$$

имеет ровно два корня, один из которых в четыре раза больше, чем другой?

Ответ: -2, 2

Решение. Пусть $t = \log_2 x$, тогда уравнение принимает вид $t^2 + (a-6)t + (9-3a) = 0$. Заметим, что $3 \cdot (3-a) = 9-3a$, $3 + (3-a) = 6-a$, откуда по теореме, обратной теореме Виета, корни этого уравнения — 3 и $3-a$. Делаем обратную замену: $\log_2 x = 3$ или $\log_2 x = 3-a$, т.е. или $x = 8$, или $x = 2^{3-a}$. Получаем два случая: $8 = 4 \cdot 2^{3-a}$ или $2^{3-a} = 4 \cdot 8$. В первом случае $a = 2$, во втором — $a = -2$.

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $AC = 42$. Биссектриса CL делится точкой пересечения биссектрис треугольника в отношении $2:1$, считая от вершины. Найдите длину стороны AB, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 14.

Ответ: 56.

Ответ: Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности (т.е. точка пересечения биссектрис). Заметив, что AI — биссектриса, в треугольнике ALC, в силу свойства биссектрисы треугольника имеем: $AC : AL = CI : IL = 2 : 1$, откуда $AL = AC/2 = 21$.

Далее, $AC \cdot AL \cdot \sin\angle A = 2S_{\triangle ACL} = 2S_{\triangle AIC} + 2S_{\triangle AIL} = AC \cdot r + AL \cdot r = (AC + AL) \cdot r$, где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Таким образом, $42 \cdot 21 \cdot \sin\angle A = (42+21) \cdot 14$, т.е. $\sin\angle A = 1$, $\angle A = 90^\circ$.

В силу свойства биссектрисы BI треугольника CLB имеем $BC : BL = CI : IL = 2 : 1$. Полагая $BL = x$, имеем $BC = 2x$. В силу теоремы Пифагора: $AC^2 + AB^2 = BC^2$, т.е. $42^2 + (21+x)^2 = (2x)^2$, откуда $x = 35$, а $AB = x + 21 = 56$.

Задача 9. Функция F определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $F(na, nb, nc) = n \cdot F(a,b,c)$, $F(a+n, b+n, c+n) = F(a,b,c) + n$, $F(a,b,c) = F(c,b,a)$. Найдите $F(58, 59, 60)$.

Ответ: 59.

Решение. Заметим, что $F(-1,0,1) = F(1,0,-1) = (-1) \cdot F(-1,0,1)$, откуда $F(-1,0,1) = 0$. Тогда $F(58,59,60) = F(-1,0,1) + 59 = 59$.

Комментарий. Однозначно определить функцию F нельзя. Например, подходят функции $F(a,b,c) = (a+b+c)/3$, $F(a,b,c) = b$ и $F(a,b,c) =$ медиана чисел $\{a,b,c\}$.

Задача 10. Пусть B — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $b \in B$, то $\frac{1}{b} \in B$ и $1 - \frac{1}{b} \in B$. Может ли в B быть ровно 1000 элементов?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Посмотрим на числа $\left\{t, \frac{1}{t}, 1-t, \frac{1}{1-t}, \frac{t}{t-1}, \frac{t-1}{t}\right\}$. Пусть $\alpha\colon x \mapsto \frac{1}{x}$, $\beta\colon x \mapsto 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Заметим, что отображение α переводит числа t, $\frac{1}{t}$, $1-t$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{t-1}{t}$ в числа $\frac{1}{t}$, t, $\frac{1}{1-t}$, $1-t$, $\frac{t-1}{t}$, $\frac{t}{t-1}$ соответственно, а отображение β — в числа $\frac{t-1}{t}$, $1-t$, $\frac{t}{t-1}$, t, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{1-t}$ соответственно.

Кроме того, заметим, что

$$t \xrightarrow[\beta]{} \frac{t-1}{t} \xrightarrow[\beta]{} \frac{1}{1-t} \xrightarrow[\alpha]{} 1-t \xrightarrow[\beta]{} \frac{t}{t-1} \xrightarrow[\beta]{} \frac{1}{t}.$$

Поэтому, если $t \in B$, то каждое из чисел t, $\frac{1}{t}$, $1-t$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{t-1}{t}$ лежит в B, причём этот набор переходит в себя под действием α и β.

Может ли в этом наборе быть меньше 6 чисел? Да, если некоторые совпадают. Не умаляя общности, можно считать, что одно из этих чисел равно t. Тогда или $t = \frac{1}{t}$, откуда $t = -1$ (т.к. $t \neq 1$ по условию), или $t = 1-t$, откуда $t = 1/2$, или $t = \frac{1}{1-t}$, откуда $t^2 - t + 1 = 0$ — нет решений, или $t = \frac{t}{t-1}$, откуда $t = 2$ (т.к. $t \neq 0$ по условию), или $t = \frac{t-1}{t}$, откуда $t^2 - t + 1 = 0$ — нет решений. Итак, в наборе может быть меньше 6 чисел, только если это набор -1, 2, $1/2$.

Итак, все действительные числа, кроме 0 и 1, разбились на шестёрки и одну тройку, набрать из которых 1000 чисел не получится.

Вариант II

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $4^{2n}+2^{n+3}-2^{n+1}$ делится на 7.

Решение. Заметим, что $4^{2n}+2^{n+3}-2^{n+1}=(14+2)^n+6\cdot 2^n$. Воспользуемся биномом Ньютона и сгруппируем все слагаемые, в которых есть 14: $(14+2)^n+6\cdot 2^n=14A+2^n+6\cdot 2^n=14A+7\cdot 2^n$. Поскольку каждое слагаемое делится на 7, то и все число делится на 7.

Комментарий. То же самое решение можно изложить на языке сравнений:

$$4^{2n}+2^{n+3}-2^{n+1}=16^n+6\cdot 2^n\equiv 2^n+6\cdot 2^n=7\cdot 2^n\equiv 0 \pmod 7.$$

Другое решение. Докажем утверждение задачи для целых неотрицательных n индукцией по n.

База. Если $n=0$, то $4^{2n}+2^{n+3}-2^{n+1}=4^0+2^3-2^1=7$ — делится на 11.

Переход. Предположим, что при $n=k$ число $4^{2n}+2^{n+3}-2^{n+1}=4^{2k}+6\cdot 2^k$ делится на 7, и докажем, что при $n=k+1$ число $4^{2n}+2^{n+3}-2^{n+1}=4^{2k+2}+6\cdot 2^{k+1}$ также делится на 7.

Заметим, что

$$4^{2k+2}+6\cdot 2^{k+1}=2\cdot(4^{2k}+6\cdot 2^k)+14\cdot 4^{2k}.$$

Первое слагаемое в правой части делится на 7 по предположению индукции, а второе — потому что содержит множитель 14. Значит, и вся сумма делится на 7. Переход доказан.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 5 авантюристов есть рубины; ровно у 11 — изумруды; ровно у 10 — сапфиры; ровно у 6 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть бриллианты, то у него есть или изумруды, или сапфиры (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или бриллианты (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что количество авантюристов, у которых есть изумруды, равняется суммарному количеству авантюристов, у которых есть рубины или бриллианы. Тогда из второго условия следует, что у 5 авантюристов есть рубины и изумруды, а у 6 — изумруды и бриллианты. Т.е. у каждого авантюриста, у которого есть бриллианты, обязательно есть изумруды. Тогда, из первого условия, не может быть авантюриста, у которого есть и сапфиры, и бриллианты. Значит, авантюристов как минимум $10+6=16$.

Столько авантюристов и правда может быть: пусть у нас есть 6 авантюристов, у которых есть изумруды и бриллианты, 5 авантюристов, у которых есть рубины, изумруды и сапфиры, а также 5 авантюристов, у которых есть только сапфиры. Можно убедиться, что этот пример подходит под все условия.

Задача 3. Бригада озеленителей трудилась на большом и малом футбольных полях, причем площадь большого поля в 2 раза больше площади малого поля. В той части бригады, которая трудилась на большом поле, было на 6 рабочих больше, чем в той части, которая трудилась на малом поле. Когда озеленение большого поля закончилось, часть бригады, которая была на малом поле, еще работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в бригаде?

Ответ: 16.

Решение. Обозначим число рабочих на меньшем поле как n, тогда их количество на большем поле равно $n+6$, а всего в бригаде $2n+6$ человек. В условии задачи «молчаливо предполагается», что производительность каждого рабочего одинаковая, обозначим ее a. Соответственно, производительности каждой части бригад равны an и $a(n+6)$. Если площадь малого поля S, то площадь большого равна $2S$. Время, затраченное на выполнение всей работы каждой из бригад, соответственно равно $\frac{S}{an}$ и $\frac{2S}{a(n+6)}$. По условию задачи $\frac{S}{an}>\frac{2S}{a(n+6)}$. В силу положительности всех переменных, это неравенство равносильно неравенству $n+6>2n$, или $n<6$. Поэтому $n\leqslant 5$, а $2n+6\leqslant 16$. Ситуация равенства, очевидно, возможна: достаточно взять любые положительные S и a.

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $AB=8$ и $AC=5$. Найдите длину стороны BC, если длина вектора $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}$ равна 10.

Ответ: 4.

Ответ: Обозначим радиус описанной окружности через R. Тогда для любых чисел x, y, z справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
&\left(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}\right)^2=\\
&=x^2OA^2+y^2OB^2+z^2OC^2+2xy\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)+2yz\left(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)+2xz\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right)=\\
&=(x^2+y^2+z^2)R^2+xy(OA^2+OB^2-AB^2)+yz(OB^2+OC^2-BC^2)+xz(OA^2+OC^2-AC^2)=\\
&=(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)R^2-xyAB^2-yzBC^2-xzAC^2=\\
&=(x+y+z)^2R^2-xyAB^2-yzBC^2-xzAC^2.
\end{aligned}$$

Тогда при $x=1$, $y=3$, $z=-4$ получаем равенство $10^2=0\cdot R^2-3AB^2+12BC^2+4AC^2$, откуда $BC^2=\frac{1}{12}\left(100+3AB^2-4AC^2\right)=16$, т.е. $BC=4$.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases}a+c=-4\\ ac+b+d=6\\ ad+bc=-5\\ bd=2\end{cases}.$$

Ответ: $(-3,2,-1,1)$ и $(-1,1,-3,2)$

Решение. Пусть x^2+ax+b и x^2+cx+d — два квадратичных многочлена, коэффициенты которых — искомые корни данной системы. Тогда

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd=x^4-4x^3+6x^2-5x+2.$$

Методом подбора находим, что числа 1 и -3 — корни этого многочлена, откуда

$$x^4-4x^3+6x^2-5x+2=(x^2-3x+2)(x^2-x+1).$$

Так как x^2-x+1 не имеет действительных корней, то он не представим в виде произведения двух многочленов первой степени, поэтому тождество

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=(x^2-3x+2)(x^2-x+1)$$

возможно только в двух случаях:

$$\begin{cases}x^2+ax+b=x^2-3x+2\\ x^2+cx+d=x^2-x+1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x^2+ax+b=x^2-x+1\\ x^2+cx+d=x^2-3x+2\end{cases}$$

тогда в первом случае получаем $a=-3$, $b=2$, $c=-1$, $d=1$, а во втором $a=-1$, $b=1$, $c=-3$, $d=2$.

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{35}}{4\sqrt{13}}+\arcsin\frac{x\sqrt{35}}{3\sqrt{13}}=\arcsin\frac{x\sqrt{35}}{2\sqrt{13}}$.

Ответ: 0, $\pm\frac{13}{12}$.

Решение. Из условия на область определения арксинуса вытекает, что

$$|x|\leqslant\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{35}}.$$

Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что $\cos\arcsin > 0$, и, следовательно,

$$\sin\arcsin A = A, \quad \cos\arcsin A = \sqrt{1-A^2},$$

получаем

$$\frac{x\sqrt{35}}{4\sqrt{13}}\sqrt{1-\frac{35x^2}{9\cdot 13}}+\frac{x\sqrt{35}}{3\sqrt{13}}\sqrt{1-\frac{35x^2}{16\cdot 13}}=\frac{x\sqrt{35}}{2\sqrt{13}}.$$

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем

$$\frac{x\sqrt{35}}{12\cdot 13}\left(\sqrt{117-35x^2}+\sqrt{208-35x^2}-6\sqrt{13}\right)=0.$$

Из данного уравнения следует, что одно решение уравнения есть $x=0$, а остальные являются корнями уравнения

$$\sqrt{117-35x^2}+\sqrt{208-35x^2}=6\sqrt{13}.$$

Из условия на область определения арксинуса следует, что все подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то их можно возвести в квадрат

$$117-35x^2+2\sqrt{(117-35x^2)(208-35x^2)}+208-35x^2=468.$$

Перенося все кроме корня в правую часть уравнения, имеем

$$2\sqrt{(117-35x^2)(208-35x^2)}=70x^2+143.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат еще раз, получаем

$$4(117-35x^2)(208-35x^2)=4900x^4+20020x^2+20449$$

или

$$65520x^2=76895.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет еще два корня $x=\pm\dfrac{13}{12}$.

Проверка. Проверяем, что левая часть уравнения при данных значениях аргумента лежит в промежутке $[-\pi/2,\pi/2]$. Для этого вычисляем косинус левой части

$$\cos\left(\arcsin\frac{x\sqrt{35}}{4\sqrt{13}}+\arcsin\frac{x\sqrt{35}}{3\sqrt{13}}\right)=\sqrt{\left(1-\frac{35x^2}{16\cdot 13}\right)\left(1-\frac{35x^2}{9\cdot 13}\right)}-\frac{35x^2}{12\cdot 13}=$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{35\cdot 13}{16\cdot 144}\right)\left(1-\frac{35\cdot 13}{9\cdot 144}\right)}-\frac{35\cdot 13}{12\cdot 144}=\frac{43\cdot 29}{1728}-\frac{455}{1728}>0.$$

Поскольку значение косинуса положительно, то все найденные числа являются решением задания.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$a\log_3^2 x-(2a+3)\log_3 x+6=0$$

имеет ровно два корня, один из которых в три раза больше, чем другой?

Ответ: 1, 3.

Решение. Пусть $t=\log_3 x$, тогда уравнение принимает вид $at^2-(2a+3)t+6=0$ или $t^2-\dfrac{2a+3}{a}t+\dfrac{6}{a}=0 (a\neq 0)$. Заметим, что $2\cdot\dfrac{3}{a}=\dfrac{6}{a}$, $2+\dfrac{3}{a}=\dfrac{2a+3}{a}$, откуда по теореме, обратной теореме Виета, корни этого уравнения — 2 и $\dfrac{3}{a}$. Делаем обратную замену: $\log_3 x=2$ или $\log_3 x=\dfrac{3}{a}$, т.е. или $x=9$, или $x=3^{\frac{3}{a}}$. Получаем два случая: $3\cdot 9=3^{\frac{3}{a}}$ или $9=3\cdot 3^{\frac{3}{a}}$ В первом случае $a=1$, во втором — $a=3$.

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $AB = 40$. Центр I вписанной в треугольник окружности делит биссектрису AL в отношении $5:3$, считая от вершины. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если радиус вписанной в него окружности равен 15.

Ответ: $85/2 = 42{,}5$.

Решение. Заметив, что BI — биссектриса, в треугольнике ALB, в силу свойства биссектрисы треугольника имеем: $AB : BL = AI : IL = 5 : 3$, откуда $BL = 3AB/5 = 24$.

Далее, $AB \cdot BL \cdot \sin\angle B = 2S_{\triangle ABL} = 2S_{\triangle AIB} + 2S_{\triangle BIL} = AB \cdot r + BL \cdot r = (AB + BL) \cdot r$, где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Таким образом, $40 \cdot 24 \cdot \sin\angle B = (40 + 24) \cdot 15$, т.е. $\sin\angle B = 1$, $\angle B = 90°$.

В силу свойства биссектрисы CI треугольника ALC имеем $AC : CL = AI : IL = 5 : 3$. Полагая $CL = 3x$, имеем $AC = 5x$. В силу теоремы Пифагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, т.е. $40^2 + (24+3x)^2 = (5x)^2$, откуда $x = 17$, а $R = AC/2 = 5x/2 = 85/2$.

Задача 9. Функция f определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $f(na, nb, nc) = n \cdot f(a, b, c)$, $f(a+n, b+n, c+n) = f(a, b, c)+n$, $f(a, b, c) = f(c, b, a)$. Найдите $f(24, 25, 26)$.

Ответ: 25.

Решение. Заметим, что $f(-1, 0, 1) = f(1, 0, -1) = (-1) \cdot f(-1, 0, 1)$, откуда $f(-1, 0, 1) = 0$. Тогда $f(24, 25, 26) = f(-1, 0, 1) + 25 = 25$.

Комментарий. Однозначно определить функцию f нельзя. Например, подходят функции $f(a, b, c) = (a + b + c)/3$, $f(a, b, c) = b$ и $f(a, b, c) =$ медиана чисел $\{a, b, c\}$.

Задача 10. Пусть A — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $a \in A$, то $\frac{1}{a} \in A$ и $\frac{1}{1-a} \in A$. Может ли в A быть ровно 1000 элементов?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Посмотрим на числа $\left\{t, \frac{1}{t}, 1-t, \frac{1}{1-t}, \frac{t}{t-1}, \frac{t-1}{t}\right\}$. Пусть $\alpha\colon x \mapsto \frac{1}{x}$, $\beta\colon x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Заметим, что отображение α переводит числа t, $\frac{1}{t}$, $1-t$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{t-1}{t}$ в числа $\frac{1}{t}$, t, $\frac{1}{1-t}$, $1-t$, $\frac{t-1}{t}$, $\frac{t}{t-1}$ соответственно, а отображение β — в числа $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{1}{t}$, $\frac{t-1}{t}$, $1-t$, t соответственно.

Кроме того, заметим, что

$$t \xrightarrow[\beta]{} \frac{1}{1-t} \xrightarrow[\beta]{} \frac{t-1}{t} \xrightarrow[\alpha]{} \frac{t}{t-1} \xrightarrow[\beta]{} 1-t \xrightarrow[\beta]{} \frac{1}{t}.$$

Поэтому, если $t \in B$, то каждое из чисел t, $\frac{1}{t}$, $1-t$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{t-1}{t}$ лежит в B, причём этот набор переходит в себя под действием α и β.

Может ли в этом наборе быть меньше 6 чисел? Да, если некоторые совпадают. Не умаляя общности, можно считать, что одно из этих чисел равно t. Тогда или $t = \frac{1}{t}$, откуда $t = -1$ (т.к. $t \neq 1$ по условию), или $t = 1 - t$, откуда $t = 1/2$, или $t = \frac{1}{1-t}$, откуда $t^2 - t + 1 = 0$ — нет решений, или $t = \frac{t}{t-1}$, откуда $t = 2$ (т.к. $t \neq 0$ по условию), или $t = \frac{t-1}{t}$, откуда $t^2 - t + 1 = 0$ — нет решений. Итак, в наборе может быть меньше 6 чисел, только если это набор -1, 2, $1/2$.

Итак, все действительные числа, кроме 0 и 1, разбились на шестёрки и одну тройку, набрать из которых 1000 чисел не получится.

Вариант III

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $7^{2n}+10^{n+1}+2\cdot 10^n$ делится на 13.

Решение. Заметим, что $7^{2n}+10^{n+1}+2\cdot 10^n=(39+10)^n+12\cdot 10^n$. Воспользуемся биномом Ньютона и сгруппируем слагаемые, в которых есть 39: $(39+10)^n+12\cdot 10^n=39A+10^n+12\cdot 10^n=39A+13\cdot 10^n$. Поскольку каждое слагаемое делится на 13, всё число делится на 13.

Комментарий. То же самое решение можно изложить на языке сравнений:

$$7^{2n}+10^{n+1}+2\cdot 10^n=49^n+12\cdot 10^n\equiv 10^n+12\cdot 10^n=13\cdot 10^n\equiv 0(\mod 13).$$

Другое решение. Докажем утверждение задачи для целых неотрицательных n индукцией по n.

База. Если $n=0$, $7^{2n}+10^{n+1}+2\cdot 10^n=13$ — делится на 13.

Переход. Предположим, что при $n=k$ число $7^{2n}+10^{n+1}+2\cdot 10^n=7^{2k}+12\cdot 10^k$ делится на 13. Докажем, что при $n=k+1$ число $7^{2n}+10^{n+1}+2\cdot 10^n=7^{2k+2}+12\cdot 10^{k+1}$ также делится на 13. Заметим, что

$$7^{2k+2}+12\cdot 10^{k+1}=39\cdot 7^{2k}+10\cdot(7^{2k}+12\cdot 10^k).$$

Первое слагаемое делится на 13, так как делится на 39, а второе делится на 13 по предположению индукции. Следовательно, вся сумма делится на 13.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 4 авантюристов есть рубины; ровно у 10 — изумруды; ровно у 6 — сапфиры; ровно у 14 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть рубины, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Ответ: 18.

Решение. Заметим, что количество авантюристов, у которых есть изумруды, равняется суммарному количеству авантюристов, у которых есть рубины или сапфиры. Тогда из второго условия следует, что у 4 авантюристов есть рубины и изумруды, а у 6 — изумруды и сапфиры. Т.е. у каждого авантюриста, у которого есть рубины, обязательно есть изумруды. Тогда, из первого условия, не может быть авантюриста, у которого есть и рубины, и бриллианты. Значит, авантюристов как минимум $4+14=18$.

Столько авантюристов и правда может быть: пусть у нас есть 4 авантюриста, у которых есть изумруды и рубины, 6 авантюристов, у которых есть бриллианты, изумруды и сапфиры, а также 10 авантюристов, у которых есть только сапфиры. Можно убедиться, что этот пример подходит под все условия.

Задача 3. Бригада рабочих стелила линолеум на складе магазина и в кассовом зале, причем площадь склада в 3 раза больше площади кассового зала. В той части бригады, которая работала на складе, было на 5 рабочих больше, чем в той части, которая работала в кассовом зале. Когда работа на складе была закончена, часть бригады, которая работала в кассовом зале, еще работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в бригаде?

Ответ: 9.

Решение. Обозначим число рабочих в кассовом зале как n, тогда их количество на складе равно $n+5$, а всего в бригаде $2n+5$ человек. В условии задачи «молчаливо предполагается», что производительность каждого рабочего одинаковая, обозначим ее a. Соответственно, производительности каждой части бригад равны an и $a(n+5)$. Если площадь кассового зала S, то площадь склада равна $3S$. Время, затраченное на выполнение всей работы каждой из бригад, соответственно равно $\frac{S}{an}$ и

$\frac{3S}{a(n+5)}$. По условию задачи $\frac{S}{an} > \frac{3S}{a(n+5)}$. В силу положительности всех переменных, это неравенство равносильно неравенству $n+5 > 3n$, или $2n < 5$. Поэтому $n \leqslant 2$, а $2n+5 \leqslant 9$. Ситуация равенства, очевидно, возможна: достаточно взять любые положительные S и a.

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $BC = 5$ и $AB = 4$. Найдите длину стороны AC, если длина вектора $3\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ равна 10.

Ответ: 8.

Ответ: Обозначим радиус описанной окружности через R. Тогда для любых чисел x, y, z справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
&\left(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}\right)^2 = \\
&= x^2OA^2 + y^2OB^2 + z^2OC^2 + 2xy\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right) + 2yz\left(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right) + 2xz\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right) = \\
&= (x^2+y^2+z^2)R^2 + xy(OA^2+OB^2-AB^2) + yz(OB^2+OC^2-BC^2) + xz(OA^2+OC^2-AC^2) = \\
&= (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)R^2 - xyAB^2 - yzBC^2 - xzAC^2 = \\
&= (x+y+z)^2R^2 - xyAB^2 - yzBC^2 - xzAC^2.
\end{aligned}$$

Тогда при $x = 3$, $y = -4$, $z = 1$ получаем равенство $10^2 = 0 \cdot R^2 + 12AB^2 + 4BC^2 - 3AC^2$, откуда $AC^2 = \frac{1}{3}\left(12AC^2 + 4BC^2 - 100\right) = 64$, т.е. $AC = 8$.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a+c=-7 \\ ac+b+d=18 \\ ad+bc=-22 \\ bd=12 \end{cases}.$$

Ответ: $(-5, 6, -2, 2)$ и $(-2, 2, -5, 6)$

Решение. Пусть x^2+ax+b и x^2+cx+d — два квадратичных многочлена, коэффициенты которых — искомые корни данной системы. Тогда

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd = x^4-7x^3+18x^2-22x+12.$$

Методом подбора находим, что числа 2 и 3 — корни этого многочлена, откуда

$$x^4-7x^3+18x^2-22x+12 = (x^2-5x+6)(x^2-2x+2).$$

Так как x^2-2x+2 не имеет действительных корней, то он не представим в виде произведения двух многочленов первой степени, поэтому тождество

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = (x^2-5x+6)(x^2-2x+2)$$

возможно только в двух случаях:

$$\begin{cases} x^2+ax+b = x^2-5x+6 \\ x^2+cx+d = x^2-2x+2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+ax+b = x^2-2x+2 \\ x^2+cx+d = x^2-5x+6 \end{cases}$$

тогда в первом случае получаем $a = -5$, $b = 6$, $c = -2$, $d = 2$, а во втором — $a = -2$, $b = 2$, $c = -5$, $d = 6$.

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin\frac{2x}{\sqrt{15}} + \arcsin\frac{3x}{\sqrt{15}} = \arcsin\frac{4x}{\sqrt{15}}$.

Ответ: $0, \pm\frac{15}{16}$.

Решение. Из условия на область определения арксинуса вытекает, что

$$|x| \leqslant \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что $\cos\arcsin > 0$, и, следовательно,

$$\sin\arcsin A = A, \quad \cos\arcsin A = \sqrt{1-A^2},$$

получаем

$$\frac{2x}{\sqrt{15}}\sqrt{1-\frac{9x^2}{15}}+\frac{3x}{\sqrt{15}}\sqrt{1-\frac{4x^2}{15}}=\frac{4x}{\sqrt{15}}.$$

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем

$$\frac{x}{15}\left(2\sqrt{15-9x^2}+3\sqrt{15-4x^2}-4\sqrt{15}\right)=0.$$

Из данного уравнения следует, что одно решение уравнения есть $x=0$, а остальные являются корнями уравнения

$$2\sqrt{15-9x^2}+3\sqrt{15-4x^2}=4\sqrt{15}.$$

Из условия на область определения арксинуса следует, что все подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то их можно возвести в квадрат

$$4(15-9x^2)+12\sqrt{(15-4x^2)(15-9x^2)}+9(15-4x^2)=240.$$

Перенося все кроме корня в правую часть уравнения, имеем

$$12\sqrt{(15-4x^2)(15-9x^2)}=72x^2+45.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат еще раз, получаем

$$144(15-4x^2)(15-9x^2)=5184x^4+6480x^2+2025$$

или

$$256x^2=225.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет еще два корня $x=\pm\dfrac{15}{16}$.

Проверка. Проверяем, что левая часть уравнения при данных значениях аргумента лежит в промежутке $[-\pi/2,\pi/2]$. Для этого вычисляем косинус левой части

$$\cos\left(\arcsin\frac{2x}{\sqrt{15}}+\arcsin\frac{3x}{\sqrt{15}}\right)=\sqrt{\left(1-\frac{4x^2}{15}\right)\left(1-\frac{9x^2}{15}\right)}-\frac{6x^2}{15}=$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{60}{256}\right)\left(1-\frac{135}{256}\right)}-\frac{90}{256}=\frac{14\cdot 11}{256}-\frac{90}{256}>0.$$

Поскольку значение косинуса положительно, то все найденные числа являются решением задания.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_4^2 x+(a-4)\log_4 x+a-5=0$$

имеет ровно два корня, один из которых в четыре раза больше, чем другой?

Ответ: 7, 5.

Решение. Пусть $t=\log_4 x$, тогда уравнение принимает вид $t^2+(a-4)t+a-5=0$. Заметим, что $(-1)\cdot 5-a=a-5$, $-1+(5-a)=4-a$, откуда по теореме, обратной теореме Виета, корни этого уравнения — -1 и $5-a$. Делаем обратную замену: $\log_4 x=-1$ или $\log_4 x=5-a$, т.е. или $x=\frac{1}{4}$, или $x=4^{5-a}$. Получаем два случая: $\frac{1}{4}=4\cdot 4^{5-a}$ или $4\cdot\frac{1}{4}=4^{5-a}$. В первом случае $a=7$, во втором — $a=5$.

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $BC = 35$. Центр I вписанной в треугольник окружности делит биссектрису AL в отношении $5:2$, считая от вершины. Найдите длину стороны AB, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 10.

Ответ: $AB = \frac{5}{12}(105 \pm 2\sqrt{105})$.

Решение. Пусть AH — высота треугольника, IS — перпендикуляр из I на прямую BC. Т.к. I — центр вписанной окружности, $IS = 10$. В силу подобия треугольников ALH и ILS, $AH : IS = AL : IL$, откуда $AH = IS \cdot \frac{AI+IL}{IL} = 10 \cdot \left(\frac{5}{2}+1\right) = 35$. Тогда площадь треугольника ABC равняется $\frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{35^2}{2}$.

Далее, поскольку BI — биссектриса треугольника ABL, то $AB : BL = AI : IL = 5:2$, аналогично $AC : LC = 5:2$. Пусть $AB = 5x$, тогда $BL = 2x$, $CL = 35 - 2x$, $AC = 175/2 - 5x$. Тогда периметр треугольника ABC равен $35 + 5x + (175/2 - 5x) = 245/2$

По формуле Герона:

$$S^2 = p(p - AB)(p - AC)(p - BC),$$

где p — полупериметр треугольника. Подставляем:

$$\frac{35^4}{4} = \frac{245}{4}\left(\frac{245}{4} - 5x\right)\left(\frac{245}{4} - \left(\frac{175}{2} - 5x\right)\right)\left(\frac{245}{4} - 35\right),$$

корнями которого являются числа $\frac{105\pm2\sqrt{105}}{12}$, $AB = \frac{5}{12}(105 \pm 2\sqrt{105})$.

Комментарий. Такой страшный ответ и отличие способа решения в этом варианте от остальных других — следствие опечатки. В правильной формулировке должна была быть биссектриса BL вместо биссектрисы AL.

Задача 9. Функция G определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $G(na, nb, nc) = n \cdot G(a, b, c)$, $G(a+n, b+n, c+n) = G(a, b, c) + n$, $G(a, b, c) = G(c, b, a)$. Найдите $G(89, 90, 91)$.

Ответ: 90.

Решение. Заметим, что $G(-1, 0, 1) = G(1, 0, -1) = (-1) \cdot G(-1, 0, 1)$, откуда $G(-1, 0, 1) = 0$. Тогда $G(89, 90, 91) = G(-1, 0, 1) + 90 = 90$.

Комментарий. Однозначно определить функцию G нельзя. Например, подходят функции $G(a, b, c) = (a + b + c)/3$, $G(a, b, c) = b$ и $G(a, b, c) =$ медиана чисел $\{a, b, c\}$.

Задача 10. Пусть D — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $d \in D$, то $1 - \frac{1}{d} \in D$ и $1 - d \in D$. Может ли в D быть ровно 1000 элементов?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Посмотрим на числа $\left\{t, \frac{1}{t}, 1-t, \frac{1}{1-t}, \frac{t}{t-1}, \frac{t-1}{t}\right\}$. Пусть $\alpha\colon x \mapsto 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $\beta\colon x \mapsto 1 - x$. Заметим, что отображение α переводит числа t, $\frac{1}{t}$, $1-t$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{t-1}{t}$ в числа $\frac{t-1}{t}$, $1-t$, $\frac{t}{t-1}$, t, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{1-t}$ соответственно, а отображение β — в числа $1-t$, $\frac{t-1}{t}$, t, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{1}{t}$ соответственно.

Кроме того, заметим, что

$$t \xrightarrow[\alpha]{} \frac{t-1}{t} \xrightarrow[\alpha]{} \frac{1}{1-t} \xrightarrow[\beta]{} \frac{t}{t-1} \xrightarrow[\alpha]{} \frac{1}{t} \xrightarrow[\alpha]{} 1-t.$$

Поэтому, если $t \in B$, то каждое из чисел t, $\frac{1}{t}$, $1-t$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{t-1}{t}$ лежит в B, причём этот набор переходит в себя под действием α и β.

Может ли в этом наборе быть меньше 6 чисел? Да, если некоторые совпадают. Не умаляя общности, можно считать, что одно из этих чисел равно t. Тогда или $t = \frac{1}{t}$, откуда $t = -1$ (т.к. $t \neq 1$ по условию), или $t = 1 - t$, откуда $t = 1/2$, или $t = \frac{1}{1-t}$, откуда $t^2 - t + 1 = 0$ — нет решений, или $t = \frac{t}{t-1}$, откуда $t = 2$ (т.к. $t \neq 0$ по условию), или $t = \frac{t-1}{t}$, откуда $t^2 - t + 1 = 0$ — нет решений. Итак, в наборе может быть меньше 6 чисел, только если это набор -1, 2, 1/2.

Итак, все действительные числа, кроме 0 и 1, разбились на шестёрки и одну тройку, набрать из которых 1000 чисел не получится.

Вариант IV

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $6^{2n} + 2^{n+2} + 12 \cdot 2^n$ делится на 17.

Решение. Заметим, что $6^{2n} + 2^{n+2} + 12 \cdot 2^n = (34+2)^n + 16 \cdot 2^n$. Воспользуемся биномом Ньютона и сгруппируем все слагаемые, в которых есть 34: $(34+2)^n + 16 \cdot 2^n = 34A + 2^n + 16 \cdot 2^n = 34A + 17 \cdot 2^n$. Поскольку каждое слагаемое делится на 17, то и все число делится на 17.

Комментарий. То же самое решение можно изложить на языке сравнений:

$$6^{2n} + 2^{n+2} + 12 \cdot 2^n = 36^n + 16 \cdot 2^n \equiv 2^n + 16 \cdot 2^n = 17 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{17}.$$

Другое решение. Докажем утверждение задачи для целых неотрицательных n индукцией по n.

База. Если $n = 0$, то $6^{2n} + 2^{n+2} + 12 \cdot 2^n = 6^0 + 2^2 + 12 \cdot 2^0 = 17$ — делится на 17.

Переход. Предположим, что при $n = k$ число $6^{2n} + 2^{n+2} + 12 \cdot 2^n = 6^{2k} + 16 \cdot 2^k$ делится на 17, и докажем, что при $n = k+1$ число $6^{2n} + 2^{n+2} + 12 \cdot 2^n = 6^{2k+2} + 12 \cdot 3^{k+1}$ также делится на 17.

Заметим, что
$$6^{2k+2} + 16 \cdot 2^{k+1} = 2 \cdot (6^{2k} + 16 \cdot 2^k) + 34 \cdot 6^{2k}.$$

Первое слагаемое в правой части делится на 17 по предположению индукции, а второе — потому что содержит множитель 34. Значит, и вся сумма делится на 17. Переход доказан.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 9 авантюристов есть рубины; ровно у 8 — изумруды; ровно у 2 — сапфиры; ровно у 11 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть бриллианты, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть рубины, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что количество авантюристов, у которых есть бриллианты, равняется суммарному количеству авантюристов, у которых есть рубины или сапфиры. Тогда из первого условия следует, что у 9 авантюристов есть рубины и бриллианты, а у 2 — сапфиры и бриллианты. Т.е. у каждого авантюриста, у которого есть рубины, обязательно есть бриллианты. Тогда, из второго условия, не может быть авантюриста, у которого есть и рубины, и изумруды. Значит, авантюристов как минимум $9 + 8 = 17$.

Столько авантюристов и правда может быть: пусть у нас есть 9 авантюристов, у которых есть рубины и бриллианты, 2 авантюриста, у которых есть изумруды, сапфиры и бриллианты, а также 6 авантюристов, у которых есть только изумруды. Можно убедиться, что этот пример подходит под все условия.

Задача 3. Бригада лесорубов пилила деревья на большой и малой делянках, причем площадь малой делянки в 3 раза меньше площади большой делянки. В той части бригады, которая работала на большой делянке, было на 8 лесорубов больше, чем в той части, которая работала на малой делянке. Когда заготовка деревьев на большой делянке закончилась, часть бригады, которая была на малой делянке, еще работала. Какое наибольшее число лесорубов могло быть в бригаде?

Ответ: 14.

Решение. Обозначим число рабочих на меньшей делянке как n, тогда их количество на большой делянке равно $n+8$, а всего в бригаде $2n+8$ человек. В условии задачи «молчаливо предполагается», что производительность каждого рабочего одинаковая, обозначим ее a. Соответственно, производительности каждой части бригад равны an и $a(n+8)$. Если площадь малой делянки S, то площадь большой равна $3S$. Время, затраченное на выполнение всей работы каждой из бригад, соответственно равно $\frac{S}{an}$ и $\frac{3S}{a(n+8)}$. По условию задачи $\frac{S}{an} > \frac{3S}{a(n+8)}$. В силу положительности всех переменных, это неравенство равносильно неравенству $n+8 > 3n$, или $n < 4$. Поэтому $n \leqslant 3$, а $2n+8 \leqslant 14$. Ситуация равенства, очевидно, возможна: достаточно взять любые положительные S и a.

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $AB = 5$, $AC = 8$ и $BC = 4$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$.

Ответ: 10.

Ответ: Обозначим радиус описанной окружности через R. Тогда для любых чисел x, y, z справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
&\left(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}\right)^2 = \\
&= x^2OA^2 + y^2OB^2 + z^2OC^2 + 2xy\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right) + 2yz\left(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right) + 2xz\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right) = \\
&= (x^2+y^2+z^2)R^2 + xy(OA^2+OB^2-AB^2) + yz(OB^2+OC^2-BC^2) + xz(OA^2+OC^2-AC^2) = \\
&= (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)R^2 - xyAB^2 - yzBC^2 - xzAC^2 = \\
&= (x+y+z)^2R^2 - xyAB^2 - yzBC^2 - xzAC^2.
\end{aligned}$$

Тогда при $x = 1$, $y = -4$, $z = 3$ получаем равенство $\left(\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}\right)^2 = 0\cdot R^2 + 4AB^2 + 12BC^2 - 3AC^2 = 100$, т.е. ответ 10.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a+c=-1 \\ ac+b+d=-1 \\ ad+bc=-5 \\ bd=6 \end{cases}.$$

Ответ: $(-3,2,2,3)$ и $(2,3,-3,2)$.

Решение. Пусть x^2+ax+b и x^2+cx+d — два квадратичных многочлена, коэффициенты которых — искомые корни данной системы. Тогда

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6.$$

Методом подбора находим, что числа 1 и 2 — корни этого многочлена, откуда

$$x^4 - x^3 - x^2 - x + 6 = (x^2-3x+2)(x^2+2x+3).$$

Так как x^2+2x+3 не имеет действительных корней, то он не представим в виде произведения двух многочленов первой степени, поэтому тождество

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = (x^2-3x+2)(x^2+2x+3)$$

возможно только в двух случаях:

$$\begin{cases} x^2+ax+b = x^2-3x+2 \\ x^2+cx+d = x^2+2x+3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+ax+b = x^2+2x+3 \\ x^2+cx+d = x^2-3x+2 \end{cases}$$

тогда в первом случае получаем $a = -3$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 3$, а во втором — $a = 2$, $b = 3$, $c = -3$, $d = 2$.

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{3} + \arcsin\frac{x\sqrt{5}}{6} = \arcsin\frac{7x\sqrt{5}}{18}$.

Ответ: 0, $\pm\frac{8}{7}$.

Решение. Из условия на область определения арксинуса вытекает, что

$$|x| \leqslant \frac{18}{7\sqrt{5}}.$$

Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что $\cos\arcsin > 0$, и, следовательно,

$$\sin\arcsin A = A, \quad \cos\arcsin A = \sqrt{1-A^2},$$

получаем

$$\frac{x\sqrt{5}}{3}\sqrt{1-\frac{5x^2}{36}} + \frac{x\sqrt{5}}{6}\sqrt{1-\frac{5x^2}{9}} = \frac{7x\sqrt{5}}{18}.$$

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем

$$\frac{x\sqrt{5}}{18}\left(\sqrt{36-5x^2}+\sqrt{9-5x^2}-7\right) = 0.$$

Из данного уравнения следует, что одно решение уравнения есть $x = 0$, а остальные являются корнями уравнения

$$\sqrt{36-5x^2}+\sqrt{9-5x^2} = 7.$$

Из условия на область определения арксинуса следует, что все подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то их можно возвести в квадрат

$$36-5x^2+2\sqrt{(36-5x^2)(9-5x^2)}+9-5x^2 = 49.$$

Перенося все кроме корня в правую часть уравнения, имеем

$$2\sqrt{(36-5x^2)(9-5x^2)} = 10x^2+4.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат еще раз, получаем

$$4(36-5x^2)(9-5x^2) = 100x^4+80x^2+16$$

или

$$980x^2 = 1280.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет еще два корня $x = \pm\dfrac{8}{7}$.

Проверка. Проверяем, что левая часть уравнения при данных значениях аргумента лежит в промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$. Для этого вычисляем косинус левой части

$$\cos\left(\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{3}+\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{6}\right) = \sqrt{\left(1-\frac{5x^2}{9}\right)\left(1-\frac{5x^2}{36}\right)} - \frac{5x^2}{18} =$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{5\cdot 64}{9\cdot 49}\right)\left(1-\frac{5\cdot 64}{36\cdot 49}\right)} - \frac{5\cdot 64}{18\cdot 49} = \frac{11\cdot 38}{800} - \frac{320}{882} > 0.$$

Поскольку значение косинуса положительно, то все найденные числа являются решением задания.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$a\log_5^2 x - (2a+5)\log_5 x + 10 = 0$$

имеет ровно два корня, один из которых в пять раз больше, чем другой?

Ответ: $\frac{5}{3}$, 5.

Решение. Пусть $t = \log_5 x$, тогда уравнение принимает вид $at^2-(2a+5)t+10 = 0$. Заметим, что $2\cdot\frac{5}{a} = \frac{10}{a}$, $2+\frac{5}{a} = \frac{2a+5}{a}$, откуда по теореме, обратной теореме Виета, корни этого уравнения — 2 и $\frac{5}{a}$. Делаем обратную замену: $\log_5 x = 2$ или $\log_5 x = \frac{5}{a}$, т.е. или $x = 25$, или $x = 5^{\frac{5}{a}}$. Получаем два случая: $5\cdot 25 = 5^{\frac{5}{a}}$ или $25 = 5\cdot 5^{\frac{5}{a}}$ В первом случае $a = \frac{5}{3}$, во втором — $a = 5$.

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $BC = 28$. Биссектриса BL делится точкой пересечения биссектрис треугольника в отношении $4 : 3$, считая от вершины. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если радиус вписанной в него окружности равен 12.

Ответ: 50.

Решение. Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности (т.е. точка пересечения биссектрис). Заметив, что CI — биссектриса, в треугольнике BLC, в силу свойства биссектрисы треугольника имеем: $BC : CL = BI : IL = 4 : 3$, откуда $CL = 3BC/4 = 21$.

Далее, $BC \cdot CL \cdot \sin\angle C = 2S_{\triangle BCL} = 2S_{\triangle BIC} + 2S_{\triangle CIL} = BC \cdot r + CL \cdot r = (BC + CL) \cdot r$, где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Таким образом, $28 \cdot 21 \cdot \sin\angle C = (28 + 21) \cdot 12$, т.е. $\sin\angle C = 1$, $\angle C = 90^\circ$.

В силу свойства биссектрисы AI треугольника ALB имеем $BA : AL = BI : IL = 4 : 3$. Полагая $AL = 3x$, имеем $AB = 4x$. В силу теоремы Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, т.е. $28^2 + (21+3x)^2 = (4x)^2$, откуда $x = 25$, а $R = AB/2 = 4 \cdot 25/2 = 50$.

Задача 9. Функция g определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $g(na, nb, nc) = n \cdot g(a, b, c)$, $g(a + n, b + n, c + n) = g(a, b, c) + n$, $g(a, b, c) = g(c, b, a)$. Найдите $g(14, 15, 16)$.

Ответ: 15.

Решение. Заметим, что $g(-1, 0, 1) = g(1, 0, -1) = (-1) \cdot g(-1, 0, 1)$, откуда $g(-1, 0, 1) = 0$. Тогда $g(14, 15, 16) = g(-1, 0, 1) + 15 = 15$.

Комментарий. Однозначно определить функцию g нельзя. Например, подходят функции $g(a, b, c) = (a + b + c)/3$, $g(a, b, c) = b$ и $g(a, b, c) =$ медиана чисел $\{a, b, c\}$.

Задача 10. Пусть C — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $c \in C$, то $\frac{1}{1-c} \in C$ и $\frac{c}{1-c} \in C$. Может ли в C быть ровно 1000 элементов?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Докажем индукцией по n, что если число $t \in C$, то и число $\frac{t}{1-nt} \in C$. Если $n = 1$, то утверждение следует из условия. Пусть теперь утверждение доказано для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$. Итак, пусть $t \in C$. По предположению индукции $\frac{t}{1-kt} \in C$. Тогда в C лежит и число

$$\frac{\frac{t}{1-kt}}{1 - \frac{t}{1-kt}} = \frac{t}{1 - kt - t} = \frac{t}{1 - (k+1)t},$$

переход доказан.

Поскольку t, по условию, отлично от 0, то все получившиеся числа различны, а значит, множество C бесконечно.